第 48 講　総合問題(8)

1 (1) n を自然数とするとき，ある自然数 a，b を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3},\ (2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}$$

とかけることを，数学的帰納法を使って示せ．

(2) (1)の a と b について，$a^2-3b^2=1$ が成り立つことを示せ．

(3) n を自然数とするとき，ある自然数 m を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n=\sqrt{m}+\sqrt{m-1},\ (2-\sqrt{3})^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

とかけることを示せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　a を定数とし，$f(x)=8^x+8^{-x}-3a(4^x+4^{-x})+3(2^x+2^{-x})$ とする．$f(x)$ を最小にする x の値と，そのときの最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 次の条件を満たしている正の整数 a, b, 正の奇数 c の組 (a, b, c) を考える.

$$2^a=(4b-c)(b+c)$$

(1) $b=13$ のとき, a, c の値を求めよ.

(2) $a \leqq 2013$ である組 (a, b, c) の個数を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第48講　総合問題(8)

［1］ a を定数とする．$f(x)=\left(27^x+\dfrac{1}{27^x}\right)-\dfrac{3}{2}a\left(9^x+\dfrac{1}{9^x}\right)+3\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)+1$ は

$a\leqq$ ア のとき最小値 $-$ イ $a+$ ウ をとり，$a>$ ア のとき最小値

$-\dfrac{a^3}{\boxed{\text{エ}}}+$ オ $a+$ カ をとる．

［2］ $p^2-q^2=24$ を満たす正の奇数の組 $(p,\ q)$ は全部で キ 個ある．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第48講　総合問題(8)

1 (1) n を自然数とするとき，ある自然数 a，b を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3},\ (2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}$$

とかけることを，数学的帰納法を使って示せ.

(2) (1)の a と b について，$a^2-3b^2=1$ が成り立つことを示せ.

(3) n を自然数とするとき，ある自然数 m を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n=\sqrt{m}+\sqrt{m-1},\ (2-\sqrt{3})^n=\sqrt{m}-\sqrt{m-1}$$

とかけることを示せ.

以下，複号同順とする.

(1) 「n が自然数のとき　$(2\pm\sqrt{3})^n=a\pm b\sqrt{3}$ を満たす自然数 a，b が存在する」 ……(＊)

を数学的帰納法で証明する.

［Ⅰ］ $n=1$ のとき　$2\pm\sqrt{3}=a\pm b\sqrt{3}$

$a=2$，$b=1$ とすれば (＊) が成り立つ.

［Ⅱ］ $n=k$ のとき　(＊) が成り立つと仮定する

つまり　$(2\pm\sqrt{3})^k=a_k\pm b_k\sqrt{3}$ を満たす自然数 a_k，b_k が存在する.

このとき

$$(2\pm\sqrt{3})^{k+1}=(2\pm\sqrt{3})(2\pm\sqrt{3})^k=(2\pm\sqrt{3})(a_k\pm b_k\sqrt{3})$$
$$=2a_k+3b_k\pm(a_k+2b_k)\sqrt{3}$$

よって　$a_{k+1}=2a_k+3b_k$，$b_{k+1}=a_k+2b_k$ とすれば

a_{k+1}，b_{k+1} は自然数より，$n=k+1$ のときも (＊) が成り立つ.

［Ⅰ］［Ⅱ］より，すべての自然数 n について (＊) は成り立つ.

(2) (1)より　$(2+\sqrt{3})^n=a+b\sqrt{3}$，$(2-\sqrt{3})^n=a-b\sqrt{3}$

2式を辺々かけて

$$(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n=(a+b\sqrt{3})(a-b\sqrt{3})$$
$$\{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})\}^n=a^2-3b^2$$

よって　$a^2-3b^2=1$　より示された.

(3) (2)より　$3b^2=a^2-1$

このとき　$(2\pm\sqrt{3})^n=a\pm b\sqrt{3}=\sqrt{a^2}\pm\sqrt{3b^2}=\sqrt{a^2}\pm\sqrt{a^2-1}$

$a^2=m$ とおくと，m は自然数より

$(2\pm\sqrt{3})^n=\sqrt{m}\pm\sqrt{m-1}$ （m は自然数）とかけることが示された.

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

> **2**　a を定数とし，$f(x)=8^x+8^{-x}-3a(4^x+4^{-x})+3(2^x+2^{-x})$ とする．$f(x)$ を最小にする x の値と，そのときの最小値を求めよ．

$t=2^x+2^{-x}$ とおくと，$2^x>0$，$2^{-x}>0$ より（相加平均）≧（相乗平均）の関係から

$t \geqq 2\sqrt{2^x \cdot 2^{-x}}=2$　　等号成立は　$2^x=2^{-x}$　より　$x=0$ のとき　……①

よって　$t \geqq 2$

$8^x+8^{-x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}(2^x+2^{-x})=t^3-3t$

$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+(2^{-x})^2=(2^x+2^{-x})^2-2\cdot 2^x\cdot 2^{-x}=t^2-2$　より

$f(x)=t^3-3t-3a(t^2-2)+3t=t^3-3at^2+6a$

$g(t)=t^3-3at^2+6a$（$t \geqq 2$）とおくと，

$g'(t)=3t^2-6at=3t(t-2a)$

(i)　$2a \leqq 2$　つまり　$a \leqq 1$ のとき

$t \geqq 2$ において $g'(t) \geqq 0$ より　$g(t)$ は $t \geqq 2$ において単調増加

よって最小値は　$g(2)=-6a+8$

$t=2$ のとき　①より　$x=0$

(ii)　$a>1$ のとき

$t \geqq 2$ における $g(t)$ の増減は右表

t	2	…	$2a$	…
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘		↗

よって最小値は　$g(2a)=-4a^3+6a$

$t=2a$ のとき　$2^x+2^{-x}=2a$　　$(2^x)^2-2a\cdot 2^x+1=0$　　$2^x=a\pm\sqrt{a^2-1}$

$a>1$ より　$a^2-1>0$　また　$a=\sqrt{a^2}>\sqrt{a^2-1}$　より　$a-\sqrt{a^2-1}>0$

よって　$x=\log_2(a\pm\sqrt{a^2-1})$

以上より

$a \leqq 1$ のとき　最小値　**$-6a+8$（$x=0$ のとき）**

$a>1$ のとき　最小値　**$-4a^3+6a$（$x=\log_2(a\pm\sqrt{a^2-1})$ のとき）**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　次の条件を満たしている正の整数 a，b，正の奇数 c の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える．

$$2^a=(4b-c)(b+c)$$

(1)　$b=13$ のとき，a，c の値を求めよ．

(2)　$a \leqq 2013$ である組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めよ．

(1)　$b=13$ のとき　$2^a=(52-c)(13+c)$

c は奇数より $52-c$ は奇数である．

また，2^a の因数のうち，奇数であるものは ±1 のみであり，$13+c>0$ であることから

$52-c=1$　　よって　$c=51$

このとき　$2^a=64$　より　$a=6$　　　以上より　**$a=6$，$c=51$**

(2)　$4b$ は偶数，c は奇数であることから，$4b-c$ は奇数である．

また，2^a の因数のうち，奇数であるものは ±1 のみであり，$b+c>0$ であることから

$4b-c=1$　　よって　$c=4b-1$

このとき　$2^a=5b-1$

ここで　$2^1=2$，$2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=32$，…… より

2^a の一の位は 2，4，8，6 をこの順に繰り返す

また，$5b-1$ は 5 の倍数より 1 小さい数より，これを満たすのは 2^a の一の位が 4 のときのみである．

よって　$a=4k-2$（k は自然数）と表される．

$a \leqq 2013$　より　$1 \leqq k \leqq 503$　である．

k の値を 1 つ定めると，a，b，c の値がただ 1 つに定まる．

したがって，求める個数は　**503 個**

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 48 講　総合問題(8)

［1］ a を定数とする．$f(x)=\left(27^x+\dfrac{1}{27^x}\right)-\dfrac{3}{2}a\left(9^x+\dfrac{1}{9^x}\right)+3\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)+1$ は

$a\leqq$ [ア] のとき最小値 $-$[イ]$a+$[ウ] をとり，$a>$ [ア] のとき最小値

$-\dfrac{a^3}{[エ]}+$[オ]$a+$[カ] をとる．

［2］ $p^2-q^2=24$ を満たす正の奇数の組 $(p,\ q)$ は全部で [キ] 個ある．

解答例

［1］ $t=3^x+\dfrac{1}{3^x}$ とおくと，$3^x>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$t\geqq 2\sqrt{3^x\cdot\dfrac{1}{3^x}}=2$　等号成立は　$3^x=\dfrac{1}{3^x}$　つまり　$x=0$ のとき　　よって　$t\geqq 2$

$27^x+\dfrac{1}{27^x}=\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)^3-3\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)=t^3-3t$　　$9^x+\dfrac{1}{9^x}=\left(3^x+\dfrac{1}{3^x}\right)^2-2=t^2-2$

よって　$f(x)=(t^3-3t)-\dfrac{3}{2}a(t^2-2)+3t+1=t^3-\dfrac{3}{2}at^2+3a+1$

$g(t)=t^3-\dfrac{3}{2}at^2+3a+1$ とおくと　$g'(t)=3t^2-3at=3t(t-a)$

$a\leqq\mathbf{2}$ のとき　$t\geqq 2$ において　$g'(t)\geqq 0$ より　$g(t)$ は $t\geqq 2$ において単調増加．

よって最小値は　$g(2)=\mathbf{-3a+9}$

$a>2$ のとき　$t\geqq 2$ における増減表は右図．

t	2	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(t)$		$-$		$+$
$g(t)$		↘		↗

よって最小値は　$g(a)=-\dfrac{a^3}{\mathbf{2}}\mathbf{+3a+1}$

［2］ $p=2m-1$，$q=2n-1$ とおくと，$p>0$，$q>0$ だから $m\geqq 1$，$n\geqq 1$

$p^2-q^2=24>0$ より $p>q$　　よって　$m>n\geqq 1$

$p^2-q^2=(p+q)(p-q)=(2m-1+2n-1)(2m-1-2n+1)$

$=4(m+n-1)(m-n)=24$

よって　$(m+n-1)(m-n)=6$

$m+n$ と $m-n$ の偶奇は一致するので，$m+n-1$ と $m-n$ は一方が奇数，一方が偶数である．

また，$m+n>m-n$ より $m+n-1\geqq m-n$

したがって $(m+n-1,\ m-n)=(3,\ 2)，(6,\ 1)$ に限られる．

$(m,\ n)=(3,\ 1)，(4,\ 3)$

ゆえに　$(p,\ q)$ の組は　$(p,\ q)=(5,\ 1)，(7,\ 5)$ の **2** 個

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。